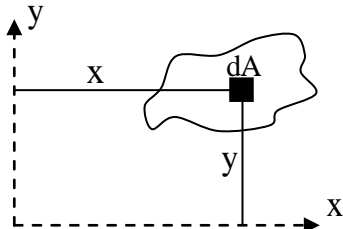


ممان اینرسی و ممان استاتیکی

الف (ممان استاتیکی یا گشتاور اول سطح :

گشتاور اول سطح نسبت به محور X ها و Y ها برابر مجموع حاصل ضرب المان کوچک سطح (dA) در فاصله

این المان از محورها است .



$$Q_X = \int_A y dA$$

$$Q_Y = \int_A x dA$$

در صورتی که سطوح به سطوح منظم تری که مرکز آن ها را می دانیم تقسیم شوند ، انتگرال های فوق به \sum

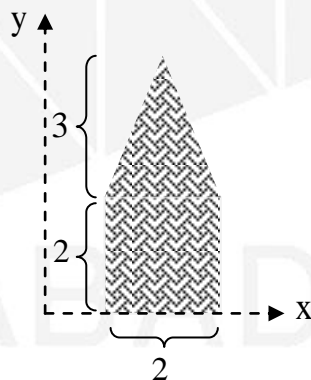
تبدیل خواهند شد ، یعنی :

$$Q_Y = \sum x_i A_i \quad Q_X = \sum y_i A_i$$

در تعریف مختصات مرکز سطح نیز :

$$\bar{X}A = Q_X \rightarrow \bar{X} = \frac{Q_X}{A} \quad \bar{Y}A = Q_Y \rightarrow \bar{Y} = \frac{Q_Y}{A}$$

مثال (ممان استاتیکی (گشتاور اول) اشکال زیر را نسبت به محور X محاسبه کنید :



$$Q_X = \sum y_i A_i$$

Y مرکز سطح مثلث : $2 + \frac{3}{3}$

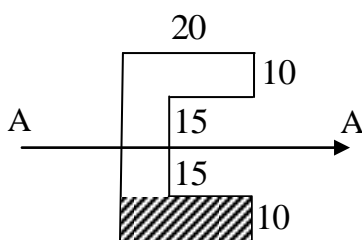
$$\rightarrow Q_X = (1 \times (2 \times 2)) + ((2 + \frac{3}{3}) \times (\frac{3 \times 2}{2})) = 13$$

مثال (گشتاور اول سطح نیم دایره نسبت به محور گذرنده از قطر آن :

مساحت نیم دایره : $\frac{\pi R^2}{2}$ مختصه Y مرکز سطح آن : $\frac{4R}{3\pi}$ گشتاور اول سطح : $\frac{2R^3}{3}$

$$Q_X = \bar{Y}A = \frac{4R}{3\pi} \times \frac{\pi R^2}{2} = \frac{2R^3}{3}$$

مثال (ممان استاتیکی شکل هاشور خورده ، نسبت به محور A-A را بدست آورید :



$$Q_X = \sum y_i A_i$$

فاصله مرکز سطح شکل هاشور خورده تا محور : $15 + \frac{10}{2} = 20$

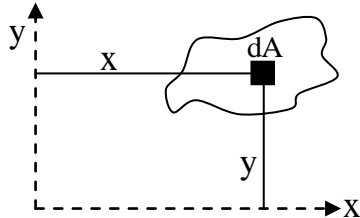
$$\rightarrow Q_X = 20 \times (10 \times 20) = 4000$$

نکته : ممان استاتیکی نقاطی که روی محور مورد محاسبه قرار دارند صفر است .

نکته : در محاسبه گشتاور اول سطح نسبت به محور X از \bar{y} و نسبت به محور Y از \bar{x} استفاده می شود.

ب) ممان اینرسی یا گشتاور دوم سطح:

اگر حاصل ضرب یک عنصر کوچک سطح (dA) را در مجذور فاصله اش از محورهای مختصات تشکیل داده و مجموع چنین حاصل ضرب هایی را برای تمام عناصر سطح به دست آوریم، اعدادی مثبت به دست خواهند آمد که آن ها را لنگر دوم سطح نسبت به محورهای X و Y می نامیم.



$$I_X = \int y^2 dA$$

$$I_Y = \int x^2 dA$$

مثال (ممان اینرسی شکل زیر (مثلث) را نسبت به امتداد قاعده آن بدست آورید :

تشابه مثلث ها :

$$\frac{h-y}{h} = \frac{x}{b} \rightarrow x = b \frac{h-y}{h}$$

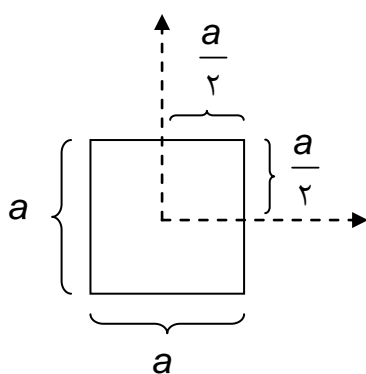
$$I_X = \int y^2 dA \rightarrow I_X = \int y^2 x dy$$

$$\rightarrow I_X = \int_0^h y^2 x dy = \int_0^h y^2 \left(b \frac{h-y}{h} \right) dy$$

$$\rightarrow I_X = \int_0^h y^2 b - y^3 \frac{b}{h} dy = \left[\frac{by^3}{3} - \frac{by^4}{4h} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^4}{4h} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{4bh^3 - 3bh^3}{12} = \frac{bh^3}{12}$$

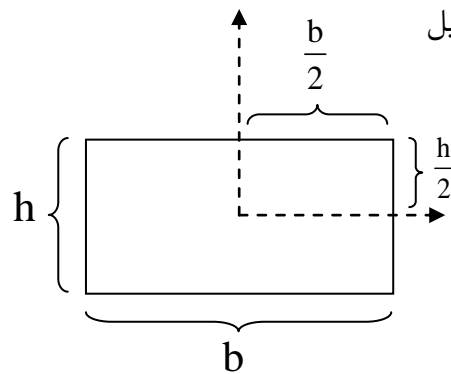
فرمول های ممان اینرسی اشکال هندسی :

\bar{I}_x ممان اینرسی نسبت به محور گذرنده از مرکز سطح و I_x ممان اینرسی نسبت به قاعده



$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{a^4}{12}$$

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{3}$$

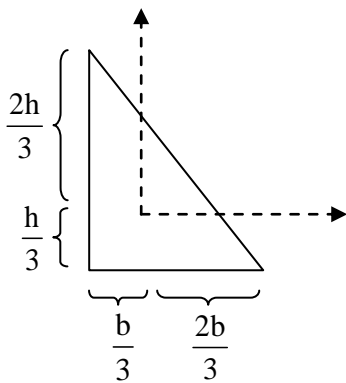


$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} \quad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad I_y = \frac{b^3h}{3}$$

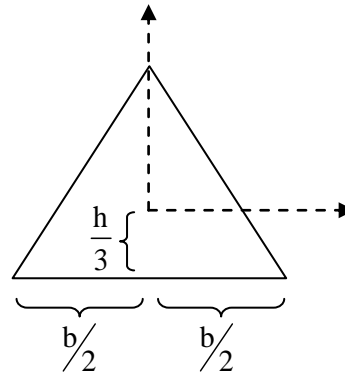
۱ - مربع و مستطیل

۲ - مثلث



$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \quad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{36}$$

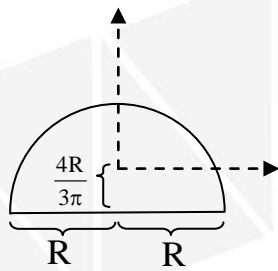
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{b^3h}{12}$$



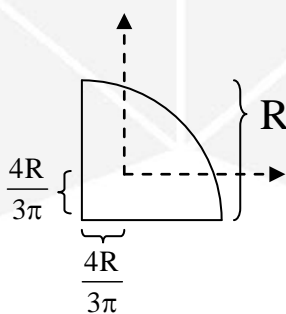
$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} \quad \bar{I}_y = \frac{b^3h}{48}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad \bar{I}_y = \frac{7b^3h}{48}$$

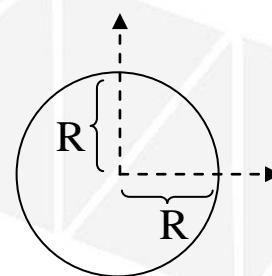
۳ - ربع، نیم دایره و دایره کامل



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$



$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{16}$$

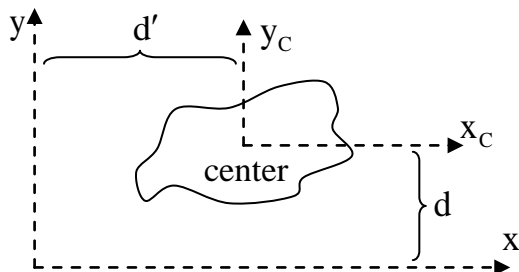


$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

قضیه انتقال محورهای موازی

با این قضیه، لنگر دوم نسبت به هر محور را می توان بر حسب لنگر دوم نسبت به محورهای موازی با

مرکز سطح مورد نظر بیان کرد، یعنی:



$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad'^2$$

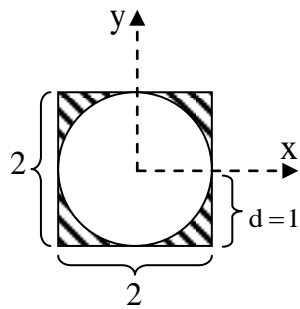
مثال (ممان اینرسی سطح A حول محور \bar{X} برابر 1500cm^4 و حول محور X برابر 9500cm^4 است،

مساحت A چند cm^2 است؟ فاصله دو محور 20cm است.

$$I_x = \bar{I}_x + Ad^2$$

$$9500 = 1500 + A \times 20^2 \rightarrow A = \frac{9500 - 1500}{400} = 20\text{cm}^2$$

مثال (با فرض $\pi=3$ ، ممان اینرسی سطح مرکب هاشور خورده شکل زیر را ، الف) نسبت به محور افقی که

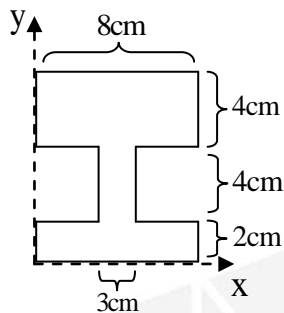


از مرکز سطح آن می گذرد ، ب) نسبت به کف شکل بدست آورید :

$$I_X = I_{X_{\text{square}}} - I_{X_{\text{circle}}} = \frac{2^4}{12} - \frac{\pi \times 1^4}{4} = \frac{16 - 3\pi}{12} = \frac{7}{12} \quad (\text{الف})$$

$$I'_X = I_X + Ad^2 = \frac{7}{12} + (2^2 - \pi \times 1^2) \times 1^2 = \frac{7}{12} + 1 = \frac{19}{12} \quad (\text{ب})$$

مثال (ممان اینرسی مقطع زیر را نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح آن بدست آورید :



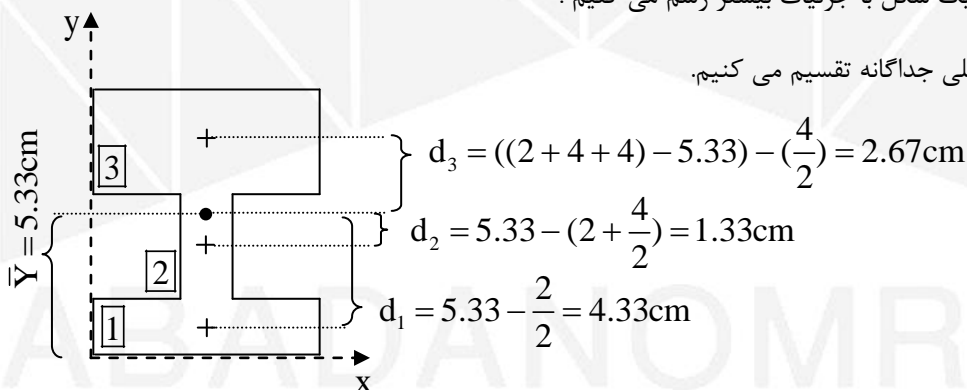
ابتدا مختصات مرکز سطح را بدست می آوریم ، باتوجه به تقارن شکل مقطع : $\bar{X} = 4\text{cm}$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{1 \times (2 \times 8) + 4 \times (4 \times 3) + 8 \times (4 \times 8)}{(2 \times 8) + (4 \times 3) + (4 \times 8)} = \frac{320}{60} = 5.33\text{cm}$$

برای بدست آوردن ممان اینرسی به فاصله مرکز سطح هر قطعه از شکل تا مرکز سطح کل

مقطع نیاز است . لذا یک شکل با جزئیات بیشتر رسم می کنیم :

و به سه شکل مستطیلی جداگانه تقسیم می کنیم.



$$d_3 = ((2 + 4 + 4) - 5.33) - \left(\frac{4}{2}\right) = 2.67\text{cm}$$

$$d_2 = 5.33 - \left(2 + \frac{4}{2}\right) = 1.33\text{cm}$$

$$d_1 = 5.33 - \frac{2}{2} = 4.33\text{cm}$$

$$\bar{I}_{X_{\text{total}}} = \bar{I}_{X_1} + \bar{I}_{X_2} + \bar{I}_{X_3}$$

$$I_{X_1} = \frac{bh^3}{12} \rightarrow \bar{I}_{X_1} = I_{X_1} + Ad_1^2 = \frac{8 \times 2^3}{12} + (2 \times 8) \times (4.33)^2 = 305.32\text{cm}^4$$

$$I_{X_2} = \frac{bh^3}{12} \rightarrow \bar{I}_{X_2} = I_{X_2} + Ad_2^2 = \frac{3 \times 4^3}{12} + (4 \times 3) \times (1.33)^2 = 37.23\text{cm}^4$$

$$I_{X_3} = \frac{bh^3}{12} \rightarrow \bar{I}_{X_3} = I_{X_3} + Ad_3^2 = \frac{8 \times 4^3}{12} + (8 \times 4) \times (2.67)^2 = 270.79\text{cm}^4$$

$$\bar{I}_{X_{\text{total}}} = \bar{I}_{X_1} + \bar{I}_{X_2} + \bar{I}_{X_3} \rightarrow \bar{I}_{X_{\text{total}}} = 305.32 + 37.23 + 270.79 = 613.34\text{cm}^4$$

چون مختصه X مرکز سطح قطعات با مقطع کل برابر است ، لذا همگی روی یک محور عمودی هستند و نیاز به d نیست :

$$\bar{I}_{Y_{\text{total}}} = \bar{I}_{Y_1} + \bar{I}_{Y_2} + \bar{I}_{Y_3} = \frac{8^3 \times 2}{12} + \frac{3^3 \times 4}{12} + \frac{8^3 \times 4}{12} = \frac{1024 + 108 + 2048}{12} = 265\text{cm}^4$$